数理解析研究所講究録
第 847 巻 1993 年 61-67

PA 上の non-principal prime filter quantifier の強さについて。

日大理工　志村　立矢　(Tatsuya SHIMURA)

一階の言語 $\mathcal{L}$ 上の構造 $\mathrm{M} = (M, =, \cdots)$ と，M上の non-principal ultrafilter $\mathcal{F}$が与えられたとき，$\mathcal{L}$ に新しい quantifier Q をつけ加えた言語 $\mathcal{L}(Q)$ の $(\mathrm{M}, \mathcal{F})$ での解釈を次のように定める。

$$(\mathrm{M}, \mathcal{F}) \models QxA(x) \text{ iff } \{a \in M : (\mathrm{M}, \mathcal{F}) \models A(a)\} \in \mathcal{F}.$$

この時，次の性質は明らかであろう。

(Q0) $QxA(x) \equiv QyA(y)$,

(Q1) $Qx\top$,

(Q2) $\neg Qx \perp$,

(Q3) $\forall x(A(x) \supset B(x)) \wedge QxA(x) \supset QxB(x)$

(Q4) $QxA(x) \wedge QxB(x) \supset Qx(A(x) \wedge B(x))$,

(Q5) $Qx(A(x) \vee QxB(x) \supset QxA(x) \vee QxB(x)$,

(Q6) $\forall xQy(x \neq y)$.

そこで，一階の理論 Tの言語を拡張し，上記のものを公理としてつけ加えた理論を $T(Q)$ と記すことにする。quantifier Q は以上のいきさつから non-principal ultrafilter quantifier と名付けたいのだが，考えてみると定義可能な集合だけに対してそれが filter に入るかどうかわかっていればよいので，non-principal prime filter quantifier と呼ぶことにする。

上に挙げた公理は Gentzen 式の形式化ではただひとつの推論規則にまとめることができる。

$$\frac{t_1 \neq a, \ldots, t_l \neq a, A_1(a), \ldots, A_m(a), \Gamma \to \Delta, B_1(a), \ldots, B_n(a)}{Qx_1 A_1(x_1), \ldots, Qx_m A_m(x_m), \Gamma \to \Delta, Qy_1 B_1(y_1), \ldots, Qy_n B_n(y_n)}.$$

但し，$l+m+n>0$, a は下式および $t_1, \ldots, t_l$ には現れず，下式の束縛変数には同じものが現れてもよいものとする。

この推論規則を LK につけ加えて得られる体系を LK(Q) と記すことにする。

Theorem 1 *LK(Q)* で *cut-elimination theorem* が成り立つ。

Corollary 1 (*cf.* **Theorem 5**) *1.* 次の条件は同値である。

(a) Tは無限モデルを持つ。

(b) $T \nvdash \neg\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y(x_1 \neq y \wedge \cdots \wedge x_n \neq y)$ がすべての n に対して成立する。

(c) $T(Q)$ は無矛盾である。

2. 次の条件は同値である。

(a) Tは無限モデルしか持たない。

(b) $T \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y(x_1 \neq y \wedge \cdots \wedge x_n \neq y)$ がすべての n に対して成立する。

(c) $T(Q)$ は Tの保存拡大である。

Corollary 2 $PA(Q)$ は PA の保存拡大である。

しかしながら，$PA(Q)$ は PA の Q による自然な拡張とは言いかねる。というのは，数学的帰納法を適用できる論理式が $PA(Q)$ では PA の言語で表すことのできるものだけに制限されているからである。

そこで，$PA(Q)^+$で $PA(Q)$ の帰納法をすべての $PA(Q)$ の言語で表すことのできる論理式に拡張して得られる体系を表すことにする。

1 $PA(Q)$ の翻訳可能性。

PA の言語に一項の述語記号 Xをつけ加えて得られる言語の論理式で自由変数を含まないものをひとつ定めそれを $F(X)$ とする。

$PA(Q)$ の論理式 A に対し，PA の論理式 A^Fを次のように帰納的に定める。

1. $(s=t)^F = s=t$,
2. $(\neg A)^F = \neg A^F$,
3. $(A * B)^F = A^F * B^F$, $* = \wedge, \vee$,
4. $(*xA(x))^F = *xA^F(x)$, $* = \forall, \exists$,
5. $(QxA(x))^F = F(\{x\}A^F(x))$.

A を $PA(Q)^+$ の帰納法の instance とするとき，A^F も帰納法の instance となることに注意しておく。

$PA(Q)^+ \supseteq T \supseteq PA$ が $F(X)$ により PA に翻訳可能とは，

$$T \vdash A \text{ iff } PA \vdash A^F$$

が成り立つこととする。

Theorem 2 $T \subseteq PA(Q)$ が PA 上有限公理化可能ならば，T は PA に翻訳可能である。

証明のアイデアはまことに簡単で，PA の定義可能な集合上の non-principal prime filter を作ってしまうことを考えればよい。standard model で考えれば，定義可能な集合は可算個しかないのだからそれを一列に並べて non-principal prime filter を作ることは容易にできる。

実際には，このことを PA の中で実行しなければならないので，次のことに注意しなければならない。

1. 定義可能な集合を PA の中で一列に並べることはできないので，Σ_n-定義可能な集合にする必要がある。
2. さらに，単に Σ_n-定義可能だけではなく，paremeter を用いて Σ_n-定義可能としなければならない。したがって，nonstandard model では考えている filter は非可算集合上のものを作る必要がある。

PA には Σ_n-truth definition があるので，以上のことを実行するのはなんでもない。つまり十分大きな m をとり，paremeter を用いて Σ_m-定義可能な集合の Gödel 数を小さい順に並べ，$\ulcorner\psi_0(x)\urcorner, \ulcorner\psi_1(x)\urcorner, \ulcorner\psi_2(x)\urcorner, \ldots$ とし，$\ulcorner\varphi_n(x)\urcorner$ を次のように定める。

$$\ulcorner\varphi_n(x)\urcorner = \begin{cases} \ulcorner\psi_n(x)\urcorner & \text{if } Tr_m(\text{"}\psi_n(x) \cap \bigcap_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x) \text{ is unbounded"}) \\ \ulcorner\neg\psi_n(x)\urcorner & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F(X) \equiv \exists n \forall x (x \in X \equiv Tr_m(\ulcorner\varphi_n(x)\urcorner),$$

とすればよい。

この定理より，次は直ちに導かれる。

Corollary 3 $PA(Q)^+$は PA の保存拡大である。

注意） この証明では，Σ_m-truth definition を使っているので，定理の主張で $PA(Q)$ が翻訳可能とするわけにはいかない。またこの証明は McDowell-Specker の定理の証明の中心部分と完全に同じである。しかし，筆者はこの定理と McDowell-Specker の定理の正確な関係は知らない。

さて，それでは $PA(Q)$ の公理全体を一挙に翻訳できるような論理式 $F(X)$ が存在するかどうかが問題になるが，これは不可能であることを示そう。アイデアは Feferman [1] の arithmetical forcing そのものである。つまり，どれほど複雑な論理式 $F(X)$ に対しても，それよりもほんの少し複雑な論理式 $A(x)$ で意地の悪いもの（ generic set を定義する論理式）が存在していることが示せるのである。

まず論理式 $F(X)$ と $0-1$ の有限列 σ にたいし，forcing relation $\sigma \Vdash F(X)$ を定義する。この定義は，Feferman [1] もしくは，recursion theory の適当な教科書に書いてある。truth definition と同様に，forcing relation も PA の中では定義不能であるが，$F(X)$ の quantifier の数に制限をつければ，定義可能となる。ここでも，PA が full induction を持っていることを用いている。

また，集合 A に対し，$A \Vdash F(X)$ を，$\exists k \in \omega (A \cap k \Vdash F(X))$ で定義する。ただし，$A \cap k$ で k までの数が A に属するかどうかの情報を表す $0-1$ 列を表すものとする。$A \Vdash F(X)$, $A \Vdash \neg F(X)$ のどちらかが成立するとき，$A \| F(X)$ と記す。

Definition 1 $A \subseteq \omega$ が *m-generic set* であるとは，どの Σ_m 論理式 $F(X)$ に対しても，$A \| F(X)$ が成り立つということである。

この時，次の 2 つの補題が成立する。

Lemma 1 $F(X)$ を Σ_m 論理式，A を論理式 $A(x)$ の定義する集合とする。A が *m-generic set* ならば，$A \Vdash F(X)$ *iff* $\models F(\{x\}A(x))$ 。

集合 A をひとつ定めたとき，

$$B_k \ni x \equiv \begin{cases} A \ni x & \text{if } x \leq k \\ A \not\ni x & \text{otherwise} \end{cases}$$

と B_k を定義する。

Lemma 2 A も B_k $(k \in \omega)$ も *m-generic* であるような集合 A で PA で定義可能なものが存在する。

Σ_m 論理式 $F(X)$ により $PA(Q)$ が翻訳可能として矛盾を導こう。A を上の補題で存在を保証される集合とする。あきらかに，どの k に対しても $A \cap B_k$ は有限集合であるから，$QxA(x)$, $QxB_k(x)$ の一方のみが成立する。ところが，A は m-generic なので，ある $k \in \omega$ にたいし，$A \cap k \| F(X)$ となるので，$A \cap k = B_k \cap k$ を用いれば，$A \Vdash F(X)$ iff $B_k \Vdash F(X)$ となり，$\models QxA(x)^F$ iff $QxB_k(x)^F$ がえられて，矛盾する。

従って次が得られた。

Theorem 3 $PA(Q)$ は PA に翻訳可能ではない。

この節の定理の証明はいずれも PA が full induction を持っていることを利用している。そこで，次の問は自然なものであろう。

Question 1 $PA(Q)$, $PA(Q)^+$ の代わりに，$I\Sigma_n(Q)$, $I\Sigma_n(Q)^+$ を考えたとき，対応する定理は成り立つか。ここで，$I\Sigma_n$ は PA の *induction* を Σ_n-論理式に制限した体系である。

2 bounded quantifier との交換可能性。

これまでに，PA と $PA(Q)^+$, PA と $PA(Q)$ の関係を調べたので，$PA(Q)^+$ と $PA(Q)$ との関係について考えてみよう。これらの違いは full-induction があるかないかの違いであり，ことばを代えて言うと，$PA(Q)^+$ では自然数はすべての定義可能な集合に対し自然数らしくふるまうが，$PA(Q)$ では quantifier Q を用いて定義された集合にたいしてはそうならない可能性があるということである。

典型的な例は,「 Q の定める "filter" は有限交差性を持つ」という命題である。論理式で表すと, $\forall u(\forall x < uQy\psi(x, y, u) \supset Qy\forall x < u\psi(x, y, u)))$ となるが（以下ではこの論理式を φ で表す）, これは $PA(Q)^+$ では y に関する帰納法により容易に証明可能だが, $PA(Q)$ では証明可能であるとは限らない。特に $\psi(x, y, u)$ が $x \neq z$ のとき, これは $Qz(y < z)$ となるが, このような簡単な論理式さえ証明可能ではない。このことを, $PA(Q)$ の健全性を用いて示そう。(この事実の指摘と証明は, 花沢氏による。)

Theorem 4 $PA(Q) \neq PA(Q)^+$.

証明 PA の non-stamdard model M をひとつ固定する。M には無限減少列 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ が存在するので, $A_i = \{x \in M - \omega : x < a_i\}$ $(i \in \omega)$ は M 上の filter を生成する。この filter を ultra-filter に拡張してそれを $\mathcal{F}$ とすれば, $(\mathrm{M}, \mathcal{F})$ は $PA(Q)$ の model となるが, $(M, \mathcal{F}) \not\models Qz(a_0 < z)$ である。

この程度の事実ならば, モデル論的手法を用いずに cut-elimination theorem を用いた純粋に証明論的な証明が存在する。

Theorem 5 $\chi_{m,n}(c)$ で次の論理式を表す。

$$\forall z_1, \ldots, z_m\ \forall x_1, \ldots, x_n < c\ \exists y(z_1 \neq y \wedge \cdots \wedge z_m \neq y \wedge$$

$$\psi(x_1, y, c) \wedge \cdots \wedge \psi(x_n, y, c) \wedge \exists x < c\neg\psi(x, y, c)).$$

この時次が成立する。

1. $PA(Q) + \neg\varphi$ が無矛盾であることは, PA で どの $\neg\exists u\chi_{m,n}(u)$ も証明できないことの必要十分条件である。

2. $PA(Q) + \neg\varphi$ が PA の保存拡大であることは, PA ですべての $\exists u\chi_{m,n}(u)$ が証明できることの必要十分条件である。

証明 必要性は, $PA(Q) + \neg\varphi$ ですべての $\exists u\chi_{m,n}(u)$ が証明できることよりあきらかである。

十分性を示そう。PA の論理式 A が $PA(Q) + \neg\varphi$ で証明可能だとする。この時, PA の公理の有限集合 Γ が存在し,

$$\Gamma, \forall x < cQy\psi(a, y, c), Qy\exists x < c\neg\psi(x, y, c) \rightarrow A,$$

が $LK(Q)$ で証明できることがわかる。$LK(Q)$ の cut-elimination により，この sequent の cut-free な証明に現れる Q についての推論規則は次の形であることがわかる。

$$\frac{t_1 \neq b, \ldots, t_l \neq b, \psi(s_1, b, c), \ldots, \psi(s_n, b, c), \exists x < c \neg\psi(x, b, c), \Phi \to \Psi}{Qy\psi(s_1, y, c), \ldots, Qy\psi(s_n, y, c), Qy\exists x < c\neg\psi(x, y, c), \Phi \to \Psi}.$$

従って，次の sequent が証明できる。

$$\exists y(t_1 \neq y \vee \cdots \vee t_l \neq y$$

$$\vee\psi(s_1, y, c) \vee \cdots \vee \psi(s_n, y, c) \vee \exists x < c\neg\psi(x, y, c)), \Phi \to \Psi.$$

ゆえに，

$$\Gamma, \chi_{m_1,n_1}(c), \ldots, \chi_{m_k,n_k}(c) \to A,$$

が証明でき，従って十分大きな m, n にたいし，$\chi_{m,n}(c) \supset A$ が PA で証明できるので十分性が言えた。

この定理によれば，$PA(Q) + \exists xQz(y < x)$ は PA の保存拡大となるが，あきらかに ω 上のどんな filter $\mathcal{F}$ をとっても $(\omega, \mathcal{F})$ はこの理論の model にはなりえない。これは，ちょっとおもしろい事実に思える。

参考文献

[1] S. Feferman, *Some applications of forcing and generic sets,* **Fundamenta Matematicae** 56 (1964/65), 325-354.

[2] T. Shimura, *On the strength of PA with a non-principal ultrafilter quantifier,* **Annals of Japan Association for Philosophy of Science** 8 (1991), 17-21.

[3] G. Takeuti, **Proof theory** (second revised edition) North-Holland, Amsterdam (1987).